**Limit Suatu Fungsi**

**3.2.1. Limit Fungsi di suatu titik**

Perhatian fungsi f yang didefinisikan dengan f(x) = fungsi ini terdefinisi pada setiap bilangan real x kecuali x = 1. Persamaan f(x) = ini dapat ditulis dalam bentuk f(x) = , sehingga didapat f(x) = 2x + 3, x ≠1. Apa yang terjadi dengan nilai f jika peubah x diberi nilai yang mendekati dengan 1? Untuk memudahkan jawab dari pertanyaan ini dibuat tabel sebagai berikut.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0.9 | 0.99 | 0.999 | 0.9999 | … | 1.0 | … | 1.0001 | 1.001 | 1.01 | 1.1 |
| f(x) | 4.8 | 4.98 | 4.998 | 4.9998 | … | 5.0 | … | 5.0002 | 5.002 | 5.02 | 5.2 |

Tabel di atas nilai f(x) ditentukan dari bentuk f(x) = atau f(x) = 2x + 3, walaupun kedua bentuk rumus fungsi ini berbeda. Rumus fungsi f(x) = , nilai f(x) tidak berlaku untuk sebarang nilai bilangan riil x, untuk x = 1 nilai f(x) tak terdefinisi (undefined). Sedangkan untuk f(x) = 2x +3 nilai f(x) berlaku untuk sebarang nilai bilangan riil x (lebih jelasnya dapat dilihat dari hasil grafiknya).

Jika tabel di atas, nilai f(x) ditetapkan dengan rumus f(x) = 2x + 3, maka untuk x = 1 didapat nilai f(x) sebesar 5. Dari penetapan nilai x dan f(x) ini, didapat hal-hal sebagai berikut.

Jika jarak x dengan 1, x ≠ 1 kurang dari 0.1, maka jarak f(x) dengan 5 kurang dari 0.2; (0.99 – 0.9) = 0.09 < 0.1 dan (4.98-4.8 = 0.18 < 0.2)

Jika jarak x dengan 1, x ≠ 1 kurang dari 0.01, maka jarak f(x) dengan 5 kurang dari 0.02; (0.999-0.99 = 0.009 < 0.01 dan (4.998 – 4.98 = 0.018 < 0.02)

Jika jarak x dengan 1, x ≠ 1 kurang dari 0.001, maka jarak f(x) dengan 5 kurang dari 0.002, (0.9999-0.999 = 0.001 dan 4.9998- 4.998 = 0.0018 < 0.002) dan seterusnya.

Dengan menggunakan lambang nilai mutlak untuk menyatakan jarak, situasi dapat ditulis sebagai berikut:

Jika 0 < │x-1│< 0.1 maka │f(x) - 5│< 0.2

Jika 0 < │x-1│< 0.01 maka │f(x) - 5│< 0.02

Jika 0 < │x-1│< 0.001 maka │f(x) - 5│< 0.002, dan seterusnya.

Dari tabel di atas dapat didekatkan dengan 5 sesuai dengan kebutuhan kita asal nilai x diambil dekat dengan 1. Artinya │f(x) - 5│dapat dibuat sekecil mungkin, asalkan │x-1│cukup kecil pula dan x ≠ 1. Lambang-lambang yang umum digunakan untuk selisih-selisih kecil dan positif ini merupakan bilangan positif ε (epsilon) dan δ (delta), sehingga bentuk-bentuk di atas dapat ditulis

│f(x) - 5│< ε bila │x-1│< δ.

Dari tabel di atas juga terlihat adanya hubungan antara δ dengan ε, hal ini ditunjukkan dengan jika │f(x) - 5│= 0.002 bila │x-1│ = 0.001. Jadi jika besar ε = 0.002 terdapat δ sebesar 0.001 dan berlaku hubungan │f(x) - 5│< 0.002 bila 0 <│x-1│< 0.001. Dari hal ini nampak bahwa δ = ½ ε. Dengan menentukan sebarang kecil dan positif nilai ε didapat nilai δ yang tergantung dengan ε.

Karena untuk sebarang nilai ε > 0 dapat ditentukan nilai δ > 0 sehingga

│f(x) - 5│< ε bila │x-1│< δ,

maka dikatakan bahwa limit f(x) untuk x mendekati 1 adalah 5 dan ditulis dalam bentuk

atau

Perlu diperhatikan bahwa│f(x) - 5│< ε identik dengan 5 – ε < f(x) < 5 + ε, artinya nilai f(x) terletak antara 5 – ε dan 5+ ε. Sedangkan,│x-1│< identik dengan 1 – δ < x < 1+ δ, artinya nilai berada antara 1 – δ dan 1 + δ . Agar jelasnya perhatikan gambar berikut. Y

5+ε

f(x)

5 -ε

1-δ x 1+δ X

**Definisi Limit di satu titik**

Definisi :

Misalkan f adalah suatu fungsi yang terdefinisi pada interval buka I yang memuat a (mungkin f tidak terdefinisi pada a). Limit f(x) untuk x mendekati a adalah L, a ∈ **R** dan L ∈ **R** ditulis , jika diberikan sebarang bilangan ε > 0 ***ada*** bilangan δ > 0 ***sedemikian hingga*** │f(x) - L│< ε bila 0 <│x-a│< δ.

Secara simbolik:

⇔ ∀ ε > 0, ∃ δ > 0 ∋ │f(x) - L│< ε bila 0 <│x-a│< δ. atau

⇔ ∀ ε > 0, ∃ δ > 0 ∋ 0 <│x-a│< δ ⇒ │f(x) - L│< ε.

**Limit Sepihak**

***Definisi***. Misalkan f adalah suatu fungsi yang terdefinisi pada interval buka (a,b). Fungsi f dikatakan mempunyai limit L jika x *mendekati a dari kanan,* ditulis = L, jika ∀ε > 0, ∃δ > 0 ∋ 0 < x-a < δ ⇒ │f(x) - L│< ε

***Definisi***. Misalkan f adalah suatu fungsi yang terdefinisi pada interval buka (a,b). Fungsi f dikatakan mempunyai limit L jika x *mendekati a dari kiri,* ditulis = L, jika ∀ε > 0, ∃δ > 0 ∋ 0 < a-x < δ ⇒ │f(x) - L│< ε

***Teorema.***

= L ⇔ = L dan = L

Bukti.

Teorema di atas dapat ditulis

= L ⇒ = L dan = L dan

= L dan = L ⇒ .

Berdasar definisi

, jika ∀ ε > 0, ∃ δ > 0 ∋ 0 <│x-a│< δ ⇒ │f(x) - L│< ε.

0 <│x-a│< δ ⇔ 0 < x - a < δ dan 0 < a - x < δ

0 < x - a < δ keadaan ini berlaku bila a didekati oleh x dari kanan, dan

0 < a - x < δ keadaan ini berlaku bila a didekati oleh x dari kiri.

0 < x - a < δ berlaku │f(x) - L│< ε dan

0 < a - x < δ berlaku │f(x) - L│< ε.

Dengan demikian mengakibatkan = L dan = L.,

Berdasar definisi limit kanan = L,

∀ε > 0, ∃δ > 0 ∋ 0 < x-a < δ ⇒ │f(x) - L│< ε dan limit kiri = L, jika ∀ε > 0, ∃δ > 0 ∋ 0 < a-x < δ ⇒ │f(x) - L│< ε.

Karena jarak x dan a selalu positif, maka 0 < x - a < δ dan 0 < a - x < δ, dapat ditulis menjadi 0 < │x - a│ < δ.

Untuk setiap x pada 0 <│x - a│ < δ berlaku │f(x) - L│< ε. Dengan demikian limit kiri dan limit kanan yang bernilai sama mengakibatkan f mempunyai limit sebesar L untuk x mendekati a. Atau = L dan = L ⇒ .

***Teorema Ketunggalan Limit suatu fungsi***

Jika = B, maka A = B.

Bukti :

Teorema ini dibuktikan dengan kontradiksi. Andaikan A ≠ B, maka │A-B│> 0.

Diberikan sebarang bilangan ε > 0, berdasar definisi limit,

= B, mengakibatkan

ada δ1 > 0 sehingga 0 <│x-a│< δ1 ⇒ │f(x) - A│< ε dan

ada δ2 > 0 sehingga 0 <│x-a│< δ2 ⇒ │f(x) - B│< ε.

Jika δ = min (δ1, δ2), maka untuk 0 <│x-a│< δ berlaku │f(x) - A│< ε dan │f(x) - B│< ε , yang mengakibatkan

│A-B│ = │A- f(x) + f(x) - B│ [∵ f(x) – f(x) = 0]

≤ │f(x) – A│ + │f(x) - B│< ε + ε = 2 ε untuk setiap x pada

0 <│x-a│< δ, hubungan ini berlaku untuk setiap ε > 0.

Dari pengandaian │A-B│> 0, maka ½ │A-B│> 0

Ambil ε = ½ │A-B│> 0.

Dari │A-B│ < 2 ε, ε diganti dengan ½ │A-B│, didapat

│A-B│ < 2. ½ │A-B│ atau

│A-B│ < │A-B│ untuk setiap x pada 0 <│x-a│< δ, hal ini merupakan kontradiksi. Jadi, pengandaian salah dan yang benar A = B..

***Teorema.***

Jika p dan q konstanta, maka

**Bukti:**

Berdasar definisi limit, idapat

δ > 0 sehingga 0 <│x-a│< δ ⇒ │(px+q) – (pa+q) │< ε.

Konstanta p terdapat dua kemungkinan, yaitu p =0 atau p ≠ 0.

1. Untuk p = 0, │(px+q) – (pa+q) │ = │q - q│= 0 untuk setiap nilai x pada 0 <│x-a│< δ. Ambil sebarang nilai δ > 0, maka secara otomatis yang ditunjukkan dipenuhi yaitu 0 < ε.
2. Untuk p ≠ 0, maka │(px+q) – (pa+q) │= │px –pa│= │p││x –a│.

Sekarang, ditentukan nilai δ > 0 sehingga 0 <│x-a│< δ ⇒ │p││x –a│ < ε.

│p││x –a│ < ε . Ambil δ = , maka.

maka⇒ │(px+q) – (pa+q) │= │p││x –a│ < │p│ = ε.

Dengan demikian terbukti bahwa

***Teorema***

Jika f(x) = c, c suatu konstanta, maka

Bukti:

Berdasar definisi limit , jika diberikan ε > 0 didapat δ > 0 sehingga 0 <│x-a│< δ ⇒ │f(x)- c│< ε. Karena f(x) = c, maka │f(x)- c│< ε menjadi

│c- c│< ε atau 0 < ε. Dengan mengambil x pada 0 <│x-a│< δ dipenuhi bahwa │f(x)- c│< ε.

∴

***Teorema***

Jika , maka

***Bukti:***

Teorema ini dipecah atas:

a). , dan

b).

Pada kesempatan ini dibuktikan bagian a)., sedangkan bagian b). diserahkan pada pembaca.

Karena , sesuai dengan definisi limit dari suatu fungsi maka jika diberikan ε1 > 0 dan ε2 > 0, maka ada δ1 > 0 dan δ2 > 0 sehingga:

1. Jika 0 <│x-a│< δ1 , maka │f(x)- A│< ε1 dan
2. Jika 0 <│x-a│< δ2 , maka │g(x)- B│< ε2 .

Jika δ = min (δ1, δ2), maka untuk 0 <│x-a│< δ berlaku │f(x) - A│< ε1 dan

│g(x) - B│< ε2 .

Kembali pada yang akan dibuktikan, yaitu

, pilih

, berdasar definisi limit suatu fungsi, jika diberikan sebarang bilangan ε > 0, terdapat bilangan δ > 0 sehingga untuk 0 <│x-a│< δ berlaku │(f(x) + g(x)) – (A+B)│< ε

│(f(x) + g(x)) – (A+B)│ = │((f(x) - A) + (g(x)) –B)│

≤ │((f(x) - A)│ + │(g(x)) –B)│ < ε

Diketahui bahwa │f(x) - A│< ε1 dan │g(x) - B│< ε2 , sehingga

│((f(x) - A)│ + │(g(x)) –B)│ < ε1 + ε2

Pilih ε1 = ε2  = ½ ε, didapat │((f(x) - A)│ + │(g(x)) –B)│ < ½ ε + ½ ε = ε.

Dengan demikian │(f(x) + g(x)) – (A+B)│ ≤ │((f(x) - A)│ + │(g(x)) –B)│ < ε untuk semua x pada 0 <│x-a│< δ. ∎

***Teorema***

Jika , maka

***Bukti:***

, berdasar definisi limit suatu fungsi, jika diberikan ε > 0, terdapat 0 <│x-a│< δ sehingga │((f(x) . (g(x) - AB│ < ε.

│((f(x) . (g(x) - AB│ = │{(f(x)-A}.{ (g(x)-B} + B{f(x) –A} + A{g(x) –B}│

≤│(f(x)-A│.│ g(x)-B│ + │B││ f(x) –A│ +│A│ g(x) –B│

Karena , sesuai dengan definisi limit dari suatu

fungsi maka jika diberikan ε1 > 0 dan ε2 > 0, maka ada δ1 > 0 dan δ2 > 0

sehingga:

1. Jika 0 <│x-a│< δ1 , maka │f(x)- A│< ε1 dan
2. Jika 0 <│x-a│< δ2 , maka │g(x)- B│< ε2 .

Jika δ = min (δ1, δ2), maka untuk 0 <│x-a│< δ berlaku │f(x) - A│< ε1 dan

│g(x) - B│< ε2 .

Bentuk ≤│(f(x)-A│.│ g(x)-B│ + │B││ f(x) –A│ +│A│ g(x) –B│ menjadi

< ε1. ε2 + │B│ ε1 + │A│ ε2, sehingga

│((f(x) . (g(x) - AB│< ε1. ε2 + │B│ ε1 + │A│ ε2 untuk setiap x pada 0 <│x-a│< δ

Pilih ε1. ε2 < 1/3 ε, ε1 < 1/3 dan ε2 < 1/3 didapat

│((f(x) . (g(x) - AB│< 1/3 ε + │B│1/3 + │A│1/3 atau

│((f(x) . (g(x) - AB│< 1/3 ε +1/3 ε + 1/3 ε atau

│((f(x) . (g(x) - AB│< ε. ∎

***Teorema***

Jika = k dan = A, maka

***Bukti:***

Dari teorema sebelumnya telah terbukti bahwa = k ; = A, dan

. Untuk membuktikan modifikasi pada limit dari perkalian dua fungsi, dengan mengganti g(x) = k dan menggunakan sifat komutatif atas perkalian fungsi terhadap suatu konstanta. Adapun langkah-langkah yang ditempuh adalah sebagai berikut.

adalah, jika diberikan ε > 0, ada δ > 0 sedemikian hingga ││< ε untuk 0 <│x-a│< δ. Dalam kasus ini dicarai nilai δ > 0 sehingga ││< ε untuk x pada 0 <│x-a│< δ.

Perhatikan, ││ = ││

≤ ││< ε,

Dengan memilih│< , didapat

││< ││; untuk x pada 0 <│x-a│< δ.

< │

< ε. ∎

***Teorema.***

Jika , maka

= = , dengan B ≠ 0

Bukti:

Bentuk diubah menjadi)

=

, tinggal menunjukkan bahwa untuk setiap ε > 0 terdapat δ > 0, sehingga

⎪⎪< ε untuk 0 <│x-a│< δ, tetapi

⎪⎪= ⎪⎪ =⎪⎪ ≤ . untuk 0 <│x-a│< δ.

Berpedoman pada yang diketahui di atas, yaitu

│g(x)- B│< ε2 bila 0 <│x-a│< δ.

│g(x)- B│< ε2, dan ε2 > 0, maka │g(x)│> 0, ambil b> 0 sehingga

│g(x)│> b > 0 dan < 0 untuk 0 <│x-a│< δ.

⎪⎪ ≤ .

< .

1. = = , dengan

**Jenis-jenis Lain dari Limit**

1. =, ada bilangan positif δ sehingga, bila 0 <│x-a│< δ maka │f(x)│> M.
2. =A , jika untuk sebarang bilangan positif walaupun cukup kecil ε, ada bilagan suatu bilangan positif M yang memenuhi │x│> M, maka │f(x)-A│ < ε
3. = , ada suatu bilangan positif P yang memenuhi │x│> P, maka │f(x)│> M.